

大地电磁测深资料的超球逼近反演

翁爱华 刘国兴

(长春科技大学地球探测与信息技术学院, 长春 130026)

摘要 超球逼近方法是一种全局搜索的二次优化方法。将该优化方法应用到大地电磁测深资料的反演中取得较好的效果。在介绍了超球逼近方法的基本原理后, 应用数值结果对该方法的可行性进行了检验。

关键词 超球逼近方法 反演 大地电磁测深

中图分类号 P631.3

大地电磁测深资料的反演是非线性化问题, 通常将模型的非线性响应作 Taylor 展开后采用线性优化方法求解。但线性化容易使反演陷入局部极小, 因此基于全局优化的非线性反演日益受到重视, 如模拟退火算法^[1]、神经网络反演^[2]、遗传算法^[3]等。但是, 这些算法为得到全局最优解的计算量是非常大的。超球逼近方法^[4](SSAA)是采用二次函数逼近目标函数的全局优化算法, 它的计算量很小。其基本思想是在 N 维的模型参数空间中选择 $N + 2$ 个模型, 这样在由 N 维模型参数和其目标函数张成的 $N + 1$ 维空间中可确定一个超球, 求解该超球方程可得到模型参数的一个近似, 从而得到 $N + 3$ 个点。按照尽量保持点集半径不变的原则, 将目标函数值最大(最坏)的点替换掉, 从而得到新的 $N + 2$ 个点。重复上述过程, 直到这 $N + 2$ 个点非常地靠近。本文将从超球逼近方法原理及其在大地电磁测深资料反演中的应用两方面进行讨论。

1 超球逼近方法

1.1 基本原理

设所讨论的优化问题是: $\min f(x)$ (1)

其中被极值化函数 $f(x)$ 为 N 元函数。通常的求解方法是对 $f(x)$ 在某点 x_k 的邻域作 Taylor 展开, 化极值问题求解为线性方程组的求解。但由于 Taylor 展开的“局部性”使相应的解也具有“局部”意义, 这与极值的“全局”观念相矛盾。为此, 在计算中用在一些点上与 $f(x)$ 值一致的二次函数代替 $f(x)$, 从而以二次函数的极小值点作为 $f(x)$ 的近似极小值点。然后改变控制点找到 $f(x)$ 的更好的二次近似函数以改变极小点位置, 从而建立起迭代过程。这样便将求 $f(x)$ 的极值化为求某个二次函数的极值, 而不必计算 $f(x)$ 的梯度函数 $\nabla f(x)$ 以及二阶导数构成的 Hesse 矩阵。因此, 这样的方法又称直接方法。选用不同的二次函数, 便得到不同的二次逼近优化方法, 当采用缺项二次函数来逼近 $f(x)$ 时, 就得到所谓的超球优化方法。

第一作者简介 翁爱华 男 29 岁 硕士 应用地球物理专业

收稿日期 1997-10-31

对于给定的一点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N)$, 求出该点的函数值并记为 $x_{N+1} = f(x)$, 于是得到 $N + 1$ 维空间的一个点。如果有 $N + 2$ 个点不同时落在 N 维空间上, 便可以通过它们作出一个超球

$$\sum_{j=1}^{N+1} (x_j - x_j^{(0)})^2 = a^2 \tag{2}$$

式中 $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{N-1}^{(0)}, x_N^{(0)}, x_{N+1}^{(0)})^T$ 为超球的球心, a 称为超球的半径。自然有 $a > 0$ 。这个超球被球心 x_0 及半径 a 所确定。球心有 $N + 1$ 个参数, 半径一个参数, 总共有 $N + 2$ 个参数, 即 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{N-1}^{(0)}, x_N^{(0)}, x_{N+1}^{(0)}, a$, 求出这 $N + 2$ 个参数, 这个超球就可以完全确定。经过运算, 可以得到超球球心参数满足的方程组:

$$\sum_{j=1}^{N+1} (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} [(x_j^{(k+1)})^2 - (x_j^{(k)})^2], k = 1, 2, \dots, N + 1 \tag{3}$$

写成矩阵形式

$$A z = b \tag{4}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(2)} - x_2^{(1)} & \dots & x_{N+1}^{(2)} - x_{N+1}^{(1)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_2^{(3)} - x_2^{(2)} & \dots & x_{N+1}^{(3)} - x_{N+1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(N+2)} - x_1^{(N+1)} & x_2^{(N+2)} - x_2^{(N+1)} & \dots & x_{N+1}^{(N+2)} - x_{N+1}^{(N+1)} \end{bmatrix}$

$$b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N+1} (x_j^{(2)} + x_j^{(1)}) (x_j^{(2)} - x_j^{(1)}) \\ \sum_{j=1}^{N+1} (x_j^{(3)} + x_j^{(2)}) (x_j^{(3)} - x_j^{(2)}) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{N+1} (x_j^{(N+2)} + x_j^{(N+1)}) (x_j^{(N+2)} - x_j^{(N+1)}) \end{bmatrix}$$

事实上, 这里所用的逼近 $f(x)$ 的函数为

$$f(x) = \pm \sqrt{a^2 - \sum_{j=1}^N (x_j - x_j^{(0)})^2 + x_{N+1}^{(0)}} \tag{5}$$

即为超球的球心。这样, 求解超球方程得到超球的球心, 便得到极值化函数 $f(x)$ 的近似极小值点。这就是超球逼近方法的思想。

1.2 超球逼近的具体做法

首先根据实际情况求得单形即 $N + 1$ 维空间的 $N + 2$ 个点形成的点集, 找出单形中函数值最大的点 $f(x^{(b)}) = \max_{1 \leq k \leq N+2} f_{N+2}(x_k)$ 和函数值最小的点 $f(x^{(0)}) = \min_{1 \leq k \leq N+2} f_{N+2}(x_k)$, 利用超球方程 (4) 求得超球的球心 $x^{(0)}$, 这样一共有 $N + 3$ 个点。如果对 $x^{(0)}$ 不满意, 则可以建立一种原则, 用 $x^{(0)}$ 代替原单形 $N + 2$ 个点中最差点 $x^{(b)}$ 。这样自 $N + 3$ 个点中又得到 $N + 2$ 个点, 不妨仍记为 $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}, x_{N+2}$, 代入超球方程, 又得到新的 $x^{(0)}$, 直到满意为止。图 1 给出了基于上述思想的超球逼近方法程序框图。从超球方程 (4) 式可以看出, 在每次迭代过程中, 并不是矩阵 A 和向量 b 的所有元素都变化, 只有被替代的点附近的行元素变化, 这就是该方法计算量小的原因之一。至于单形的生成, 可根据实际情况给出初始模型, 使用步长增加法获得, 或者直接采用随机数生成法获得。但总原则是尽量保持点集的半径 d 最大, 这里 $d = \max_{1 \leq k \leq N+2} \overline{x_k - \bar{x}}$, \bar{x} 是点集的形心。点的替换原则是所

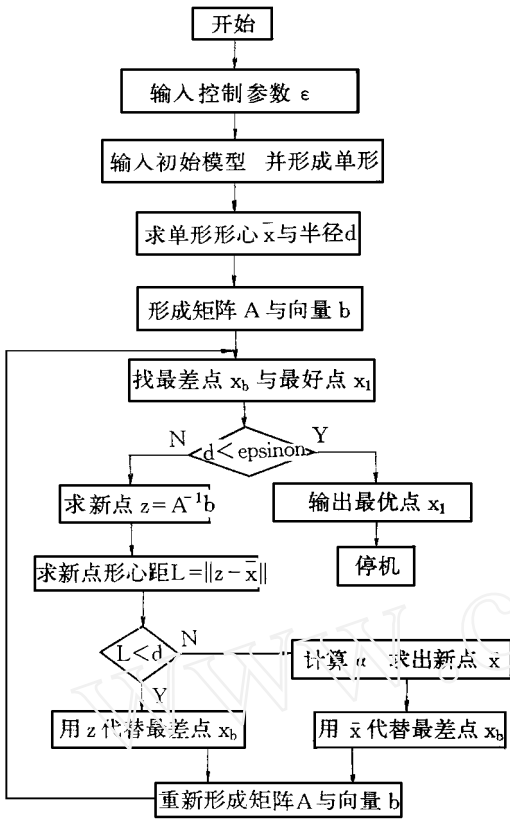


图 1 超球逼近方法程序框图

Fig 1 The flow-chart for SSAA

求新点应该尽量保持点集的半径不变大, 同

时认为迭代终止时所有的点应尽量靠近, 从而点集的半径 d 趋于 0, 故把迭代终止原则确定为点集的半径小于给定的阈值。

2 算 例

利用上述方法, 对三层 K 型模型、五层 KHK 型模型在理论上作了模拟计算。图 2 与图 3 给出了迭代 500 次后的模拟结果。从图中可以看出, 反演曲线完全拟合理论曲线, 且目标函数和单形的半径随着迭代的进行逐渐减小。但是, 它们只是一致地单调减小。事实上, 在超球逼近反演中, 新点的替换原则是尽量保持点集的半径不变大。当新点的形心距小于半径时, 则用新点代替最差的点, 但这样的新点并不总使目标函数值最小, 从而出现目标函数不是单调下降。同样, 当新点的形心距大于半径时, 则采用如下的方案重新生成新点来尽量保持点集的半径不变大。

$$\tilde{x} = x^{(i)} + a(x^{(0)} - x^{(i)}),$$

$$a = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

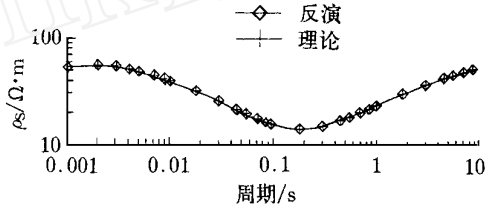
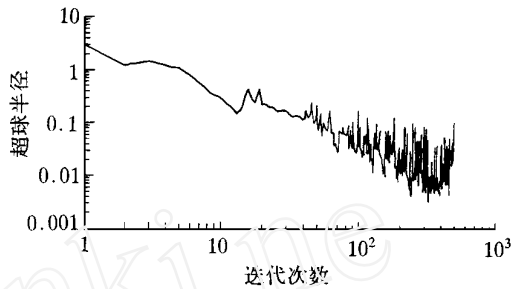
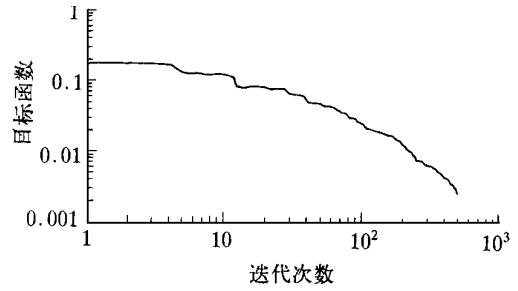


图 2 三层 K 型模型的反演结果

Fig 2 The SSAA inversion for K type geoelectrical model

$$a = \sum_{i=1}^{N+1} (x_i^{(0)} - x_i^{(l)})^2,$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N+1} (\bar{x}_i - x_i^{(l)})}{\sum_{i=1}^{N+1} (x_i^{(0)} - x_i^{(l)})},$$

$$c = \sum_{i=1}^{N+1} (x_i^{(l)} - x_i^{(0)})^2 - d_0.$$

$x^{(0)}$ 是超球的球心, \tilde{x} 是新点, $x^{(l)}$ 是目标函数最小的点, \bar{x} 是点集的形心, d 是超球的半径。采用该法生成的新点实质上是 $x^{(0)}$ 和 $x^{(l)}$ 的加权, 出现半径的振荡减小可能是重新生成的新点不能保证 $\tilde{x} - \bar{x} = d$ 所致。该问题的理论证明尚待进一步研究。

表 1 给出了 K 层模型理论模型和反演结果。表中 R 表示电阻率, H 表示层厚度。可以看出, 对于简单的三层 K 型模型, 反演参数和理论模型是一样的。

对于较复杂的五层 KHK 型地电模型, 除高阻表层电阻率较差外, 其它参数基本上反映了真实模型。

图 4 给出了某地实测大地电磁测深资料的反演结果。原始数据由 V5 仪器取得, 采样频点为 36 个, 最高频采样周期是 0.003 s, 最低频采样周期为 454 s。反演结果模型与测井综合分析的电性层参数分布比较, 两者基本一致。

3 结 论

- (1) 超球逼近方法应用于大地电磁测深反演这一实质上非线性的优化问题的求解是可行的;
- (2) 超球逼近优化方法每次迭代只需要进行一次正演计算, 且不必计算梯度向量和二阶导数矩阵, 计算一个测点迭代 500 次在 PC586 上只要 1 min, 相对模拟退火或神经网络等非线性优化方法, 该方法的计算量是很小的。

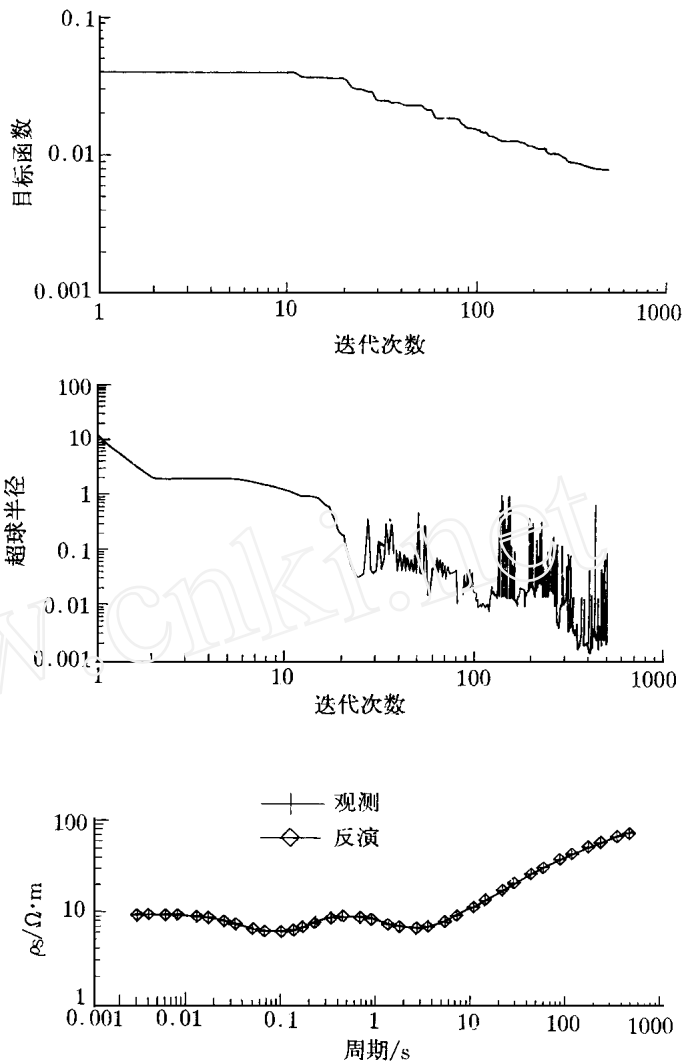


图 3 某地区实际 MT 资料反演结果
Fig 3 The SSAA inversion for real data

表 1 K 型理论模型和反演参数

Table 1 The K type model comparison between theory and inversion

理论模型	反演参数
R (1)= 50	R (1)= 50.8
H (1)= 0.2	H (1)= 0.19
R (2)= 10	R (2)= 10.5
H (2)= 0.5	H (2)= 0.6
R (3)= 100	R (3)= 98.2

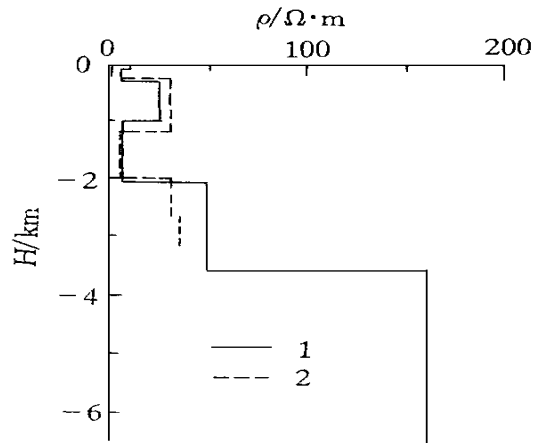


图 4 某地 MT 资料反演模型与测井分析对比

Fig 4 The comparison between SSAA inversion and Logging

参 考 文 献

- 1 Dittmer J K. The inversion of magnetic and resistivity data using the simulating annealing algorithm. *Geophysical Prospecting*, 1995, **43**: 397~ 416
- 2 Raiche A. A pattern recognition approach to geophysical inversion using neural nets. *Geophysical Journal International*, 1991, **105**: 629~ 648
- 3 Staffa P L , Sen M K. Nonlinear multiparameter optimization using genetic algorithms: Inversion of plane-wave seismograms. *Geophysics*, 1991, **56**: 1790~ 1810
- 4 赵凤治. 数值优化中的二次逼近法. 北京: 科学出版社, 1994

THE SUPER- SPHERE APPROXIMATION ALGORITHM IN MAGNETOTELLURICS DATA INVERSION

W eng A ihua, L iu Guoxing

(Changchun University of Science and Technology, Changchun 130026)

Abstract The super- sphere approximation algorithm (SSAA) is a whole domain nonlinear quadratic optimization approach. In the paper, a concise explanation of the method is given and then we apply it to the data of magnetotellurics to verify its validity for both theoretical and geophysical data

Key words super- sphere approximation algorithm, inversion, magnetotellurics